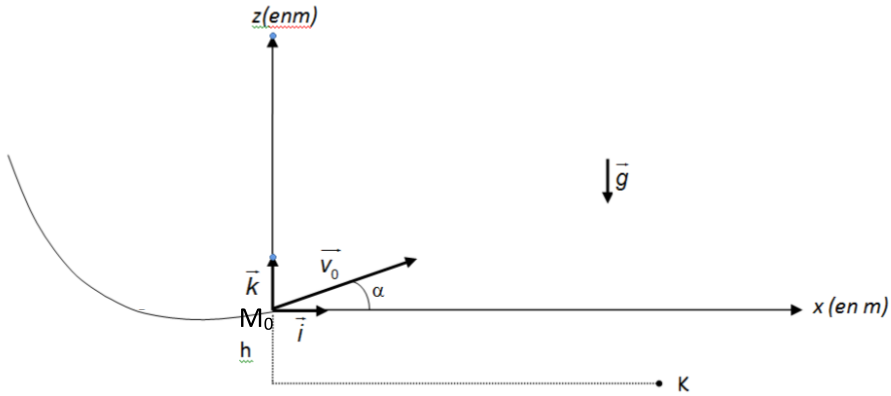
Correction

Exercice 1

1. Schématisation du problème

1.1. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé Galiléen.

1.2.



2. Etude dynamique

2.1. Les équations horaires *x(t)* et *z(t)* sont :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \times cos(\alpha) \times t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times t \end{cases}$$

Par définition : $\vec{v}(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}(t) \quad soit \ \vec{v}(t) \begin{pmatrix} v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t) = -g \times t + v_0 \times \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

2.2. Par définition : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \quad soit \quad \vec{a}(t) \begin{pmatrix} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = -g \end{pmatrix}$

2.3. Pour obtenir l'équation de la trajectoire *z*(*x*) de l'athlète, on isole le temps *t* de *x*(*t*) et on reporte l'expression de *t* dans *z*(*t*) :

$x = v_0.cos\alpha.t$ donc $t = \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$ et $z(t) = -\frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \times sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$

Finalement, on obtient : $z(t) = -\frac{g \times x^2}{2 \times v_0^2 \times (cos(\alpha))^2} + tan\,(\alpha) \times x$

2.4. L'athlète atterrit au point K on a donc : $z_K = -h$.

2.5. On remplace z_K par sa valeur dans l'équation de la trajectoire afin de déterminer x(k) :

$$-h = -\frac{g \times x_K^2}{2 \times v_0^2 \times (cos(\alpha))^2} + tan\,(\alpha) \times x_K$$

On remplace par les valeurs et on trouve l'équation du second degré suivante (avec $v_0 = 81{,}0/3{,}6\ m.s^{-1}$)

$$1{,}00.10^{-2} \times x_K^2 - 1{,}94.10^{-1} \times x_K + 44 = 0$$

on trouve deux valeurs : $x_{K1} = 76{,}5$ m ou $x_{K2} = -57{,}2$ m.

La valeur devant être positive, on déduit : $x_K = 76{,}5$ m

2.6.

$$\vec{v}(t_k) \begin{pmatrix} v_x(t_k) = v_0 \times \cos(\alpha) = 22{,}1\ m.s^{-1} \\ v_y(t_k) = -g \times t_k + v_0 \times \sin(\alpha) = -29{,}6\ m.s^{-1} \end{pmatrix}$$

2.7. $v_K = \sqrt{v_x^2(t_K) + v_z^2(t_K)} = 37{,}0\ m.s^{-1}$

2.8. Étude énergétique

$$\Delta E_m(O \to K) = E_{mK} - E_{mO} = \sum W_{OK}(\overrightarrow{F_{nc}}) \quad avec \quad \overrightarrow{F_{nc}} : forces\ non\ conservatives$$

Les frottements étant négligés, il n'y pas de forces non conservatives. On a donc conservation de l'énergie mécanique.

On peut donc écrire :

$$\Delta E_m(O \rightarrow K) = E_{mK} - E_{mO} = 0$$

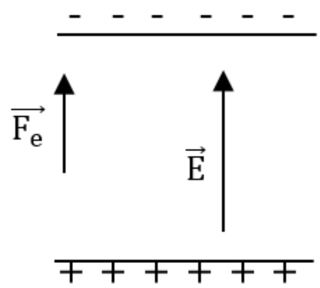
$$\Delta E_m(O \rightarrow K) = E_{mK} - E_{mO} = \frac{1}{2} \times m \times v_K^2 + m \times g \times z_K - \left(\frac{1}{2} \times m \times v_O^2 + m \times g \times z_O\right) = 0$$

On sait que $z_O = 0$ et $z_K = -h$
On peut aussi simplifier par m

$$\frac{1}{2} \times v_K^2 - g \times h - \frac{1}{2} \times v_O^2 = 0 \quad soit \qquad v_K^2 = v_O^2 + 2 \times g \times h$$

$$v_K = \sqrt{v_O^2 + 2 \times g \times h} = 37{,}0\ m.s^{-1}$$

Exercice 2



1. Le champ électrique descend les potentiels et il est dirigé vers le haut. La plaque de haut est chargée négativement et celle du bas est chargée positivement.

2. $\vec{F_e} = q \times \vec{E} = +3e \times \vec{E}$

3. Sachant que q>0 (q = 3 e), on en déduit que les vecteurs force électrique et champ électrique ont la même direction et même de sens.

4. $F_e = 3e \times E = 3 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 8{,}70 \times 10^6 = 4{,}18 \times 10^{-12}\ N$
   $P = m_{Al} \times g = 4{,}48 \times 10^{-26} \times 9{,}81 = 4{,}40 \times 10^{-25}\ N$
   $\frac{F_e}{P} = \frac{4{,}18 \times 10^{-12}}{4{,}40 \times 10^{-25}} = 9{,}50 \times 10^{12}$
   Le poids de l'ion aluminium est donc négligeable devant la force électrique.

5. Inventaire des forces
   Système : {ion aluminium}
   Référentiel terrestre supposé galiléen
   Repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ indiqué sur le schéma fourni
   Le champ électrique $\vec{E}$ est supposé uniforme

$$\vec{E}\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = +E \end{pmatrix}$$

   Une seule force s'exerce sur le système :
   - la force électrique $\vec{F_e} = q \times \vec{E} = +3e \times \vec{E}$

   Application de la 2ème loi de Newton
   Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Nous pouvons appliquer la 2ème loi de Newton (ou le principe fondamental de la dynamique)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{Al} \times \vec{a}(t)$$

   or $\quad \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F_e} = 3e \times \vec{E}$
   donc $\quad \vec{F_e} = 3e \times \vec{E} = m_{Al} \times \vec{a}(t)$

$$\boldsymbol{\vec{a}(t)} = \frac{3e \times \boldsymbol{\vec{E}}}{\boldsymbol{m_{Al}}}$$

   Coordonnées du vecteur accélération
   D'après l'égalité vectorielle précédente, on en déduit les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$:

$$\boldsymbol{\vec{a}(t)}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_x(t) = 0} \\ \boldsymbol{a_y(t)} = \dfrac{3e \times \boldsymbol{E}}{\boldsymbol{m_{Al}}} \end{pmatrix}$$

6. Les conditions initiales

$$\overrightarrow{OM}_0 \begin{pmatrix} x_0 = 0\ m \\ y_0 = 0\ m \end{pmatrix} \ et\ \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_{0y} = -\ v_0 \times \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Coordonnées du vecteur vitesse (ou équations horaires de la vitesse)

On sait que :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

Pour déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$, on cherche la primitive de $\vec{a}(t)$

$$\vec{v}(t) \begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = \dfrac{3e \times E}{m_{Al}} \times t + C_2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la valeur des constantes C_1 et C_2, on se place à l'instant initial (t = 0 s)

$$\vec{v}(t = 0\ s) = \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_x(t = 0\ s) = C_1 = v_{0x} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(t = 0\ s) = \dfrac{3e \times E}{m_e} \times 0 + C_2 = C_2 = v_{0y} = -\ v_0 \times \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

On déduit que :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(t) = \dfrac{3e \times E}{m_{Al}} \times t - v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur position (ou équations horaires de position)

On sait que :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$$

Pour déterminer les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, on cherche la primitive de $\vec{v}(t)$

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t + C_3 \\ y(t) = \dfrac{3e \times E}{2 \times m_{Al}} \times t^2 - v_0 \times \sin(\alpha) \times t + C_4 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la valeur des constantes C_3 et C_4, on se place à l'instant initial (t = 0 s)

$$\overrightarrow{OM}(t = 0\ s) = \overrightarrow{OM}_0 \begin{pmatrix} x(t = 0\ s) = v_0 \times \cos(\alpha) \times 0 + C_3 = C_3 = x_0 = 0\ m \\ y(t = 0\ s) = \dfrac{3e \times E}{2 \times m_{Al}} \times 0^2 - v_0 \times \sin(\alpha) \times 0 + C_4 = C_4 = y_0 = 0\ m \end{pmatrix}$$

On déduit que :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ y(t) = \dfrac{3e \times E}{2 \times m_{Al}} \times t^2 - v_0 \times \sin(\alpha) \times t \end{cases}$$

7. À la date t_S, on sait que $y(t_S) = 0$ m

$$\frac{3e \times E}{2 \times m_{Al}} \times {t_S}^2 - v_0 \times \sin(\alpha) \times t_S = 0$$

$$\left(\frac{3e \times E}{2 \times m_{Al}} \times t_S - v_0 \times \sin(\alpha)\right) \times t_S = 0$$

La solution mathématique $t_S = 0$ s n'est pas cohérente avec la situation physique (départ de l'électron).

$$\frac{3e \times E}{2 \times m_{Al}} \times t_S - v_0 \times \sin(\alpha) = 0$$

$$t_S = \frac{2 \times m_{Al}}{3e \times E} \times v_0 \times \sin(\alpha)$$

$$t_S = \frac{2 \times 4{,}48 \times 10^{-26}}{3 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 8{,}70 \times 10^{6}} \times 8{,}20 \times 10^{5} \times \sin(15{,}0) = 4{,}55 \times 10^{-9}\ s$$

L'ion aluminium retrouve sa hauteur initiale au bout de 4,55 ns.

8. $x(t_S) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t_S = 8{,}20 \times 10^{5} \times \cos(15{,}0) \times 4{,}55 \times 10^{-9} = 3{,}61 \times 10^{-3}\ m$

L'ion aluminium retrouve sa hauteur initiale 3,61 mm plus loin selon l'axe Ox

Exercice 3

1. Les planètes du système solaire

1.1. Le carré de la période de révolution T d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi grand axe a de l'ellipse.

1.2. On modélise le nuage de point $T^2 = f(a^3)$ par une fonction linéaire d'équation $T^2 = k \times a^3$
On choisit deux points sur le modèle
A (0 ; 0) et B ($90{,}0 \times 10^{36}$ m^3 ; y_B)
On utilise l'échelle de l'axe des ordonnées pour déterminer y_B : 25×10^{18} $s^2 \leftrightarrow 6{,}6$ cm

$$y_B = \frac{7{,}1\ cm \times 25 \times 10^{18}\ s^2}{6{,}6\ cm} = 26{,}9 \times 10^{18}\ s^2$$

On déterminer le coefficient de proportionnalité (coefficient directeur de la fonction linéaire)

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{26{,}9 \times 10^{18}\ s^2}{90{,}0 \times 10^{36}\ m^3} = 2{,}99 \times 10^{-19}\ s^2.m^{-3}$$

2. Eude de l'orbite de l'astéroïde Ida autour du Soleil

2.1. Le demi grand axe a est égale à la moitié de la somme de la distance au plus près et au plus loin

$$a = \frac{4{,}08 \times 10^8 + 4{,}48 \times 10^8}{2} = 4{,}28 \times 10^8\ km = \ 4{,}28 \times 10^{11}\ m$$

D'après la 3e loi de Kepler,

$$T^2(Ida) = k \times a^3(Ida)$$

$$T(Ida) = \sqrt{k \times a^3(Ida)} = \sqrt{2{,}99 \times 10^{-19}\ s^2.m^{-3} \times (4{,}28 \times 10^{11}\ m)^3} = 1{,}53 \times 10^8\ s$$

3 Etude de la lune Dactyle

3.1. Les trajectoires sont représentées dans le référentiel Ida.

3.2. Ces trajectoires sont elliptiques.

3.3. La 1e loi de Kepler indique qu'Ida doit occuper l'un des deux foyers de la trajectoire de Dactyle.